6 MAGNETOHYDRODYNAMIQUE

→ Si le fluide étudié est composé de particules chargées, celle-ci subissent la force de Lorentz $\bar{f} = q(\bar{E} + \bar{v} \times \bar{B})$
On aura un couplage entre le bilan d'impulsion (N-S) et les eq. de l'éléctromagnétisme (Maxwell)

6.1 Force de Lorentz sur le fluide

→ Les équations de Maxwell pour le champ électrique s'écrivent :

$$\bar{\nabla} \cdot \bar{E} = \rho_e / \epsilon_0 \qquad \bar{\nabla} \times \bar{E} = -\partial_t \bar{B}$$

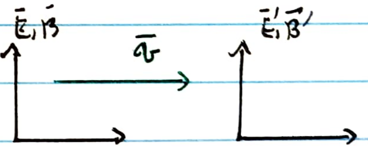
→ On introduit le tenseur de Maxwell : $F^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}$

on a alors : $\partial_\alpha F^{\alpha\beta} = j^\beta$

où $j^\beta = \begin{pmatrix} \rho_e \\ j_i \end{pmatrix}$

→ $F^{\alpha\beta}$ est un tenseur de rang 2. Il se transforme selon :
$F'^{\alpha\beta} = L^\alpha{}_\gamma L^\beta{}_\delta F^{\gamma\delta}$ où $L^\gamma{}_\alpha \equiv$ transfo de Lorentz.
Sur les champs $\bar{E}$ et $\bar{B}$, cette transfo se traduit par :

$$\vec{E}' = \gamma(\bar{E} + \bar{v} \times \bar{B}) - (\gamma - 1)(\bar{E} \cdot \hat{v})\hat{v}$$
$$\vec{B}' = \gamma\left(\bar{B} - \frac{\bar{v} \times \bar{E}}{c^2}\right) - (\gamma - 1)(\bar{B} \cdot \hat{v})\hat{v}$$



avec $\hat{v} \equiv \bar{v} / |\bar{v}|$

→ On se limite à l'approximation $|\bar{v}| \ll c$. Alors

$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \simeq 1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}$. À l'ordre $\mathcal{O}(v/c)$, on a donc

$$\begin{cases} \bar{E}' = \bar{E} + \bar{v} \times \bar{B} \\ \bar{B}' = B \end{cases}$$

→ On fait l'hypothèse de la loi d'Ohm lorsque le système est au repos : $\bar{J}' = \sigma \bar{E}'$. Pour un conducteur en mvt,

$$\bar{J} = \sigma(\bar{E} + \bar{v} \times \bar{B}) \quad \text{si } \bar{J} \simeq \bar{J}' \text{ et } \bar{E}' = \bar{E} + \bar{v} \times \bar{B}$$

⊙ Force totale sur une particule de fluide

→ Sur chaque PDF, on a $\vec{F}_\alpha = q_\alpha \left(\vec{E}(\vec{x}_\alpha) + \vec{v}_\alpha \times \vec{B}(\vec{x}_\alpha) \right)$. La force totale est :

$$\vec{F} = \sum_\alpha \vec{F}_\alpha = \sum_\alpha q_\alpha \vec{E}(\vec{x}_\alpha) + \sum_\alpha q_\alpha \vec{v}_\alpha \times \vec{B}(\vec{x}_\alpha)$$

→ Par l'hypothèse du continu, dans la limite $\delta V \to 0$, on a :

$$\vec{f} = \frac{\vec{F}}{\delta V} = \left(\frac{\sum_\alpha q_\alpha}{\delta V} \right) \vec{E}(\vec{x}) + \left(\frac{\sum_\alpha q_\alpha v_\alpha}{\delta V} \right) \times \vec{B}(\vec{x})$$

$$\Leftrightarrow \vec{f} = \rho_e \vec{E} + \vec{J} \times \vec{B}$$

→ Par conservation de q, $\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = -\partial_t \rho_e$ $\qquad \vec{J} = \sigma(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$

$$\Leftrightarrow \vec{\nabla}[\sigma(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})] = -\partial_t \rho_e \qquad \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho_e / \epsilon_0$$

$$\Leftrightarrow \sigma \frac{\rho_e}{\epsilon_0} + \sigma \vec{\nabla}(\vec{v} \times \vec{B}) = -\partial_t \rho_e$$

On introduit le temps de relaxation des charges $\tau_e \equiv \frac{\epsilon_0}{\sigma}$

$$\Leftrightarrow \partial_t \rho_e + \frac{\rho_e}{\tau_e} = -\sigma \vec{\nabla}(\vec{v} \times \vec{B})$$. Or $\tau_e \ll 1 \Leftrightarrow \rho_e / \tau_e \gg 1$

Si $\vec{v}$ ne varie pas à une échelle de temps proche de τ_e,

$$\frac{\rho_e}{\tau_e} \simeq -\sigma . \vec{\nabla}(\vec{v} \times \vec{B}) \Leftrightarrow \rho_e = -\epsilon_0 \vec{\nabla}(\vec{v} \times \vec{B})$$

→ Estimation de $\rho_e \vec{E}$ qui apparait ds la force de Lorenz :

$$|\rho_e \vec{E}| \sim \underbrace{\frac{\epsilon v B}{L}}_{|\rho_e| = |\epsilon \vec{\nabla}(\vec{v} \times \vec{B})|} \underbrace{\frac{J}{\sigma}}_{J = \sigma E} = \frac{v \tau_e J B}{L}$$

→ Estimons $|j \times B| \sim JB \Rightarrow \left| \frac{\rho_e \vec{E}}{\vec{J} \times \vec{B}} \right| \sim \frac{v \tau_e}{L} \ll 1$

Ainsi, la force de Lorentz s'approxime selon $\vec{f} = \vec{J} \times \vec{B}$

⊙ Bilan d'impulsion :

→ On fait l'hypothèse de quasi-neutralité : $-\partial_t \rho_e = \bar{\nabla}.\bar{j} = 0$

→ Le bilan d'impulsion devient :

$$\rho\left[\partial_t \bar{u} + (\bar{u}.\bar{\nabla})\bar{u}\right] = -\bar{\nabla}p + \mu\nabla^2\bar{u} + \bar{j}\times\bar{B} + \bar{f}^{ext}$$

6.2 Loi d'Ampère - Maxwell

→ On rappelle $\bar{\nabla}\times\bar{B} = \mu_0(\bar{J} + \epsilon_0\partial_t\bar{E}) = \mu_0\bar{j} + \frac{1}{c^2}\partial_t\bar{E}$

→ Ordre de grandeur de $|\epsilon_0\partial_t\bar{E}| \sim \frac{\epsilon_0 E}{T} \sim \frac{\epsilon_0 U}{L}.E \sim \frac{\epsilon_0 U}{L}.\frac{j}{\sigma}$

$\sim \frac{\epsilon_0 U}{L}\frac{j}{\sigma} \ll |\bar{j}|$

→ La loi d'Ampère-Maxwell se réduit à $\nabla\times B = \mu_0\bar{j}$

→ On a alors :

$\nabla\times B = \mu_0\bar{j}$ $\qquad\qquad$ $\bar{j} = \sigma(\bar{E} + \bar{v}\times\bar{B})$

$\bar{\nabla}.\bar{B} = 0$ $\qquad\qquad$ $\bar{\nabla}\times\bar{E} = -\partial_t\bar{B}$

$\bar{\nabla}.\bar{j} = 0$ $\qquad\qquad$ $\rho D_t\bar{u} = -\bar{\nabla}p + \mu\nabla^2\bar{u} + \bar{j}\times\bar{B}$

$\bar{\nabla}.u = 0$

↳ Système fermé d'équations.

6.3 Équation d'induction magnétique

→ On rappelle $\bar{\nabla}\times\bar{E} = -\partial_t \bar{B}$ $\qquad \bar{j} = \sigma \bar{E} + \sigma \bar{u}\times\bar{B}$

$$\Leftrightarrow \nabla\times\left(\frac{\bar{j}}{\sigma} - \bar{u}\times\bar{B}\right) = -\partial_t \bar{B}$$

$$\Leftrightarrow \partial_t \bar{B} = \nabla\times(\bar{u}\times\bar{B}) - \frac{1}{\sigma}\bar{\nabla}\times\bar{j} \qquad \bar{j} = \frac{1}{\mu_0}(\bar{\nabla}\times\bar{B}),\ \bar{\nabla}.\bar{B} = 0$$
$$= \bar{\nabla}\times(\bar{u}\times\bar{B}) + \frac{1}{\mu_0\sigma}\nabla^2\bar{B}$$

$$\Leftrightarrow \partial_t \bar{B} = \bar{\nabla}\times(\bar{u}\times\bar{B}) + \eta\nabla^2\bar{B}$$ avec $\eta = \frac{1}{\mu_0\sigma}$ la diffusivité magnétique

→ On réduit ainsi le # d'équations du système fermé :

$$\partial_t \bar{B} = \bar{\nabla}\times(\bar{u}\times\bar{B}) + \eta\nabla^2\bar{B}$$
$$\bar{\nabla}.\bar{B} = 0 \qquad \bar{\nabla}.\bar{u} = 0 \qquad \rho D_t\bar{u} = -\bar{\nabla}p + \mu\nabla^2\bar{u} + \bar{j}\times\bar{B}$$

→ Par ailleurs,

$$\bar{\nabla}\times(\bar{u}\times\bar{B}) = (\bar{B}.\bar{\nabla})\bar{u} - (\bar{u}.\bar{\nabla})\bar{B}$$
$$\Leftrightarrow \partial_t \bar{B} + (\bar{u}.\bar{\nabla})\bar{B} = (\bar{B}.\bar{\nabla})\bar{u} + \eta\nabla^2\bar{B}$$

$$\Leftrightarrow D_t B = (\bar{B}.\bar{\nabla})\bar{u} + \eta\nabla^2\bar{B}$$

6.4 Adimensionalisation des équations

→ On définit les variables sans dimensions suivantes :

$$\bar{u} = U\hat{u},\ \bar{x} = L\hat{x},\ t = \frac{L}{U}\hat{t},\ \bar{B} = B_0\hat{B}.$$

↳ En injectant dans $D_t\bar{B} = (\bar{B}.\bar{\nabla})\bar{u} + \eta\nabla^2\bar{B}$, on a :

$$\frac{1}{T}\partial_{\hat{t}}(B_0\hat{B}) + \frac{UB_0}{L}(\hat{u}.\hat{\nabla})\hat{B} = \frac{UB_0}{L}(\hat{B}.\hat{\nabla})\hat{u} + \eta\frac{B_0}{L^2}\hat{\nabla}^2\hat{B}$$

On définit le nombre de Reynolds magnétique $R_m \equiv \frac{UL}{\eta}$

↳ L'équation devient (en laissant tomber les "^")

$$\partial_t\bar{B} + (\bar{u}.\bar{\nabla})\bar{B} = (\bar{B}.\bar{\nabla})\bar{u} + \frac{1}{R_m}\nabla^2\bar{B}$$

R_m mesure le rapport entre la non linéarité de l'eq. d'induction et la diffusion du champs $\bar{B}$.

- Bilan d'impulsion adimensionnalisé :

→ On fait un choix supplémentaire :

$$\bar{j} = \sigma U B_0 \hat{j} \quad \text{et} \quad p \equiv \rho U^2 \hat{p}$$

On avait $\rho(\partial_t \bar{u} + (\bar{u}.\bar{\nabla})\bar{u} = -\bar{\nabla}p + \mu\nabla^2\bar{u} + \bar{j}\times\bar{B}$

$\hookrightarrow \left[\partial_t \hat{u} + (\hat{u}.\hat{\nabla})\hat{u}\right]\frac{U^2}{L} = \frac{-1}{L\rho}\hat{\nabla}(\rho U^2 \hat{p}) + \frac{\mu U}{\rho L^2}\hat{\nabla}^2\hat{u} + \frac{\sigma U B_0^2}{\rho}\hat{j}\times\hat{B}$

$$\Rightarrow \partial_t \hat{u} + (\bar{u}.\bar{\nabla})\bar{u} = -\bar{\nabla}p + \frac{1}{Re}\nabla^2\bar{u} + N\bar{j}\times\bar{B}$$

DEF où $N = \dfrac{\sigma B_0^2 L}{\rho U}$ est le nombre de Stuart mesure du terme non linéaire p/r à la force de Lorentz

→ En général, on a 3 paramètres : Re, Rm, N.

→ Si il n'y a pas de $\langle \bar{B}_{ext} \rangle$, on peut faire le choix de $B_0 = \sqrt{\rho\mu_0}\, U$

Dans ce cas, $N = \dfrac{\sigma\rho\mu_0 U^2 L}{\rho U} = \sigma\mu_0 UL = Rm$

Par ailleurs, $\bar{\nabla}\times\bar{B} = \mu_0\bar{J}$

$$\Rightarrow \frac{B_0}{L}\hat{\nabla}\times\hat{B} = \mu_0\sigma U B_0 \bar{J} \Rightarrow \bar{\nabla}\times\bar{B} = \mu_0\sigma UL\bar{j} = Rm\,\bar{j}$$

$$\Rightarrow N\bar{j}\times\bar{B} = Rm\,\frac{\bar{\nabla}\times\bar{B}}{Rm}\times\bar{B}$$

et $\partial_t \bar{u} + (\bar{u}.\bar{\nabla})\bar{u} = -\bar{\nabla}p + \dfrac{1}{Re}\nabla^2\bar{u} + (\bar{\nabla}\times\bar{B})\times\bar{B}$

équations de la MHD : (adimentionnées)

① Impulsion

$$\partial_t \bar{u} + (\bar{u}.\bar{\nabla})\bar{u} = -\bar{\nabla}p + \frac{1}{Re}\nabla^2\bar{u} + N\bar{j}\times\bar{B} \quad \text{et} \quad \bar{\nabla}.\bar{u} = 0$$

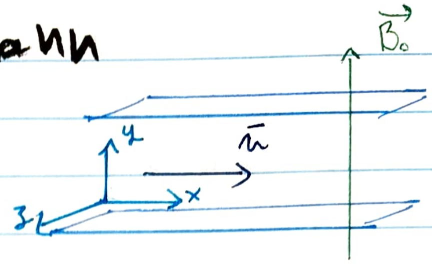
avec $Re \equiv \dfrac{\rho LU}{\eta}$ et $N = \dfrac{\sigma B_0^2 L}{\rho U}$ et $\bar{j} = \dfrac{1}{\mu_0}\bar{\nabla}\times\bar{B}$

② Induction

$$\partial_t \bar{B} + (\bar{u}.\bar{\nabla})\bar{B} = (\bar{B}.\bar{\nabla})\bar{u} + \frac{1}{Rm}\nabla^2\bar{B} \quad \text{et} \quad \bar{\nabla}.\bar{B} = 0$$

avec $Rm = \dfrac{UL}{\eta}$

6.5 Ecoulement de Hartmann



→ On choisit $\bar{u} = [u(y), 0, 0]$
et $\bar{B} = [b(y), B_x, 0]$

→ On cherche une solution stationnaire du problème. La seule équation non triviale pour $\bar{B}$ est

induction: $(\bar{B}.\bar{\nabla})\bar{u} + \frac{1}{Rm}\nabla^2 b = 0$

impulsion: $0 = -\bar{\nabla}p + \frac{1}{Re}\nabla^2\bar{u} + N\bar{j}\times\bar{B}$

$= \partial_x p + \frac{1}{Re}\partial_y^2\bar{u} + N\bar{j}(\bar{1}_y + b\bar{1}_x)$ avec $\bar{\nabla}\times\bar{B} = Rm\,\bar{j}$

$= -\nabla_x p + \frac{1}{Re}\partial_y^2\bar{u} + \frac{N}{Rm}\partial_y b$

→ Le système à résoudre se résume à :

$\frac{1}{Re}u'' + \frac{N}{Rm}b' = \nabla_x p$ et $u' + \frac{1}{Rm}b'' = 0$

$\Rightarrow u'' + \frac{Ha^2}{Rm}b' = -1$ $\qquad u' + \frac{1}{Rm}b'' = 0$

en prenant $U = \frac{-\nu}{L\nabla_x p}$

→ Condition aux bords pour la vitesse : $u = 0$ en $y = \pm 1$

→

⊙ Conditions aux bords pour le champ magnétique:

→ Les conditions du rapport entre milieu s'expriment comme:

$\left(\frac{\bar{E}_2}{\sigma_2} - \frac{\bar{E}_1}{\sigma_1}\right).\vec{n} = \rho_s$ densité de charge surfacique $\qquad (\bar{B}_2 - \bar{B}_1).\bar{n} = 0$

$\bar{n}\times(\bar{E}_2 - \bar{E}_1) = 0$ $\qquad \bar{n}\times(\bar{B}_2 - \bar{B}_1) = \mu_0 I$ densité du courant surfacique

① Domaine parfaitement conducteur :
$\bar{J} = \sigma\bar{E}$ ~ $\sigma \to \infty \Rightarrow \bar{E} = 0$ dans le solide et $b' = 0$ sur les bords
② $\sigma_s = 0$, b est sur les plaques, on choisit $b = 0$ sur les bords

- Résolution :

On avait :
$$\begin{cases} u'' + \frac{Ha^2}{Rm} b' = -1 \quad // \, \partial_y(\cdot) \\ u' + \frac{1}{Rm} b'' = 0 \end{cases}$$

$$\hookrightarrow u''' + \frac{Ha^2}{Rm} b'' = 0 \Rightarrow u''' - Ha^2 u' = 0 \Rightarrow u'' - Ha^2 u = C$$

La solution générale est :
$$u = C_1 e^{Ha\,y} + C_2 e^{-Ha\,y} - \underbrace{\frac{C}{Ha^2}}_{\text{solution particulière}}$$

→ En imposant les conditions aux bords, on a :

$$u(y) = \hat{u}\left(1 - \frac{\cosh(Ha\,y)}{\cosh Ha}\right) \qquad b(y) = \frac{Rm}{Ha}\left(\hat{u}\,\frac{\sinh(Ha\,y)}{\cosh(Ha)} - \frac{y}{Ha}\right)$$

avec $\hat{u} = \frac{1}{Ha}\,\frac{c+1}{c\,Ha + \tanh(Ha)}$ où c : conductivité de la paroi.

6.6 Onde Alfven

→ En MHD, les ondes peuvent se propager même dans un milieu incompress.
Dans un milieu idéal ($\mu = \eta = 0$), on a :
$$\rho(\partial_t \bar{u} + (\bar{u}\cdot\bar{\nabla})\bar{u}) = -\bar{\nabla} p + \bar{j}\times\bar{B} + \mu\nabla^2\bar{u}$$
$$\partial_t \bar{B} + (\bar{u}\cdot\bar{\nabla})\bar{B} = (\bar{B}\cdot\bar{\nabla})\bar{u} + \eta\nabla^2\bar{B}$$

→ On linéarise la propagation autour de la solution :
$\bar{U}_0 = 0 \quad \bar{B} = \bar{B}_0, \quad p = p_0 \Rightarrow \bar{u} = \bar{u}_1, \quad \bar{B} = \bar{B}_0 + \bar{b}_1 \quad p = p_0 + p_1$

A l'ordre 1 :
$$\rho\,\partial_t u_1 = -\bar{\nabla} p_1 + \frac{1}{\mu_0}(\bar{\nabla}\times\bar{b}_1)\times\bar{B}_0 \quad \text{et} \quad \partial_t \bar{b}_1 = (\bar{B}_0\cdot\bar{\nabla})\bar{u}_1$$

On cherche des solutions de la forme :
$$\begin{cases} \bar{u}_1 = \hat{u}_1 \exp(i\{\bar{k}\cdot\bar{x} - \omega t\}) \\ \bar{b}_1 = \hat{b}_1 \exp(i\{\bar{k}\cdot\bar{x} - \omega t\}) \\ p_1 = \hat{p}_1 \exp(i\{\bar{k}\cdot\bar{x} - \omega t\}) \end{cases}$$

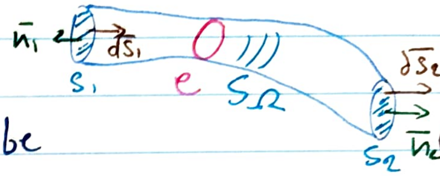
On trouve : $\bar{u}_1 = \hat{u}_1 \exp(i k_\perp x_\perp)\exp\left(i k_\parallel\left(x_\parallel \pm \frac{B_0}{\sqrt{\rho\mu_0}} t\right)\right)$

L'onde se propage dans la direction $x_\parallel$ avec une vitesse $\pm\frac{B_0}{\sqrt{\rho\mu_0}}$. C'est une onde de Alfven.

5.7 Reconnexion magnétique

DEF Une ligne de champ magnétique comme une ligne partout tangente à $\bar{B}$. Pour un contour $\mathcal{C}$, l'ensemble des lignes de champ magnétique qui passe par le contour forment un tube de champ magnétique. Son intensité est donnée par :

$$\phi \equiv \oint_S \bar{B} \cdot d\bar{S}$$



→ Le flux est le même $\forall \mathcal{C}$ le long du tube

Thm Soit un fluide conducteur idéal ($\eta = 0$). Si 2 points se trouvent sur la même ligne de champ $\bar{B}$ en t, alors ces 2 points resteront sur la même ligne de champ en $t + \Delta t$. C'est le thm d'Alfven.

→ Si $\eta \neq 0$, on peut avoir des reconnexions de lignes de champ $\bar{B}$